* معادلة ريكاتي:

- وهي معادلة من الشكل

$$\frac{dy}{dx} = p(x)y^2 + Q(x)y + R(x)$$

حيث R ، Q ، P توابع مرتبطة بـ x فقط.

* ملاحظة:

1) المعادلة تؤول إلى معادلة خطية عندما $P(x)=0$

2) المعادلة تؤول إلى معادلة برنولي عندما $R(x)=0$

- لإيجاد معادلة ريكاتي لا بد أن نعلم حلاً خاصاً وليكن y_1 حيث $y_1 = y_1(x)$ ويكون عندئذٍ الحل العام لمعادلة ريكاتي هو:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy_1}{dx} - \frac{1}{z^2}\frac{dz}{dx}$$

وبالتعويض بالمعادلة نجد:

$$\frac{dy_1}{dx} - \frac{1}{z^2}\frac{dz}{dx} = p(x)\left(y_1 + \frac{1}{z}\right)^2 + Q(x)\left(y_1 + \frac{1}{z^2} + R(x)\right)$$

$$\frac{dy_1}{dx} - \frac{1}{z^2}\frac{dz}{dx} = p(x)y_1^2 + 2p(x)y_1\frac{1}{z} + p(x)\frac{1}{z} + Q(x)y_1 + \frac{Qx}{z} + R(x)$$

$$-\frac{1}{z^2}\frac{dz}{dx} = 2p(x)y_1 \cdot \frac{1}{z} + p(x) + p(x)\frac{1}{z^2} + \frac{Qx}{z}$$

لنضرب بـ $-Z^2$:

$$\frac{dZ}{dx} = -2p(x)\,y_1 Z - p(x) - Q(x)\,Z$$

$$\frac{dZ}{dx} + [2p(x)\,y_1 + Q(x)]\,Z = -p(x)$$

وهي معادلة خطية بالنسبة للمتحول Z وتحل بالطريقة المألوفة

مثال: أوجد الحل العام لمعادلة تفاضلية

$$2x^2\frac{dy}{dx} = (x-1)(y^2-x^2) + 2xy$$

حيث $y = x$ حل خاص لها .

الحل: (عندما ذكر $y=x$ حل خاص لها فهي تدل على ريكاتي)
يمكن أن نتأكد من أن $y = x$ هو حل للمعادلة والآن لنفرض

$$y = y_1 + \frac{1}{Z} = x + \frac{1}{Z} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 1 - \frac{1}{Z^2}\frac{dZ}{dx}$$

لنعوض في المعادلة :

$$2x^2\left(1 - \frac{1}{z}\cdot\frac{dz}{dx}\right) = (x-1)\left[\left(x+\frac{1}{z}\right)^2 - x^2\right] + 2x\left(x+\frac{1}{z}\right)$$

$$2x^2 - \frac{2x^2}{z}\frac{dz}{dx} = (x-1)\left[\left(x^2 + \frac{2x}{z} + \frac{1}{z^2} - x^2\right] + 2x^2 + \frac{2x}{z}$$

$$-\frac{2x^2}{z}\frac{dz}{dx} = (x-1)\left(\frac{2x}{z^2} + \frac{1}{z^2}\right) + \frac{2x}{z}$$

$$-\frac{2x^2}{z}\frac{dz}{dx} = \frac{2x^2}{z} + \frac{x}{z^2} - \frac{2x}{z} - \frac{1}{z^2} + \frac{2x}{z}$$

لنضرب بـ $-\frac{z^2}{2x^2}$ فنجد:

$$\frac{2x^2}{z}+\frac{x}{z^2}-\frac{1}{z^2}$$

$$\frac{dz}{dx}=-z-\frac{1}{2x}+\frac{1}{2x^2}$$

$$\frac{dz}{dx}+z=\frac{1}{2x^2}-\frac{1}{2x}$$

وهي معادلة خطية بالنسبة لـ z ولدينا:

$$P(x)=1 \quad , \quad Q(x)=\frac{1}{2x^2}-\frac{1}{2x}$$

$$I(x)=e^{\int P(x)dx}=e^{\int d(x)}=e^{x}$$

وبالتعويض بالعلاقة:

$$I(x).z=\int I(x).\,Q(x)\,dx$$

$$e^{x}.z=\int e^{x}\left[\frac{1}{2x^2}-\frac{1}{2x}\right]dx$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{e^{x}}{x^2}dx-\frac{1}{2}\int\frac{e^{x}}{x}dx$$

لإيجاد التكامل $\int\frac{e^{x}}{x}$ نتبع طريقة التكامل بالتجزئة:

$$u=\frac{1}{x} \quad , \quad du=-\frac{dx}{x^2}$$

$$dv=e^{x}dx \qquad v=e^{x}$$

$$-\frac{1}{2}\int\frac{e^{x}}{x}dx=-\frac{e^{x}}{2x}-\frac{1}{2}\int\frac{e^{x}}{x^2}dx$$

$$e^{x}\cdot z=\frac{1}{2}\int\frac{e^{x}}{x^{2}}\,dx-\frac{e^{x}}{2x}-\frac{1}{2}\int\frac{e^{x}}{x^{2}}\,dx=\frac{1}{2}\frac{e^{x}}{x}$$

$$z=\frac{-1}{2x}+c$$

ولكن $y=x+\frac{1}{z}$

$$\frac{1}{z}=y-x\Rightarrow z=\frac{1}{y-x}$$

بالتعويض:
$$\frac{1}{y-x}=-\frac{1}{2x}+c$$

حيث c ثابت اختياري.

$$y-x=-2x+\frac{1}{c}\Rightarrow y=-x+\frac{1}{c}$$

تمرين: أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية:

$$x^{2}\frac{dy}{dx}=x^{2}y^{2}+xy-3$$

حيث $y=\frac{1}{x}$ حل خاص لها.

* المعادلات التفاضلية من الشكل: (I) $\acute{f}(y)\frac{dy}{dx}+p(x)f(y)=Q(x)$

حيث $Q(x)$ ، $p(x)$ توابع للمتحول x ، $f(y)$ تابع لـ y.

و $\acute{f}(y)$ هو تفاضل تابع $f(y)$ للمتحول y.

لحل هذا النوع من المعادلات نفرض أن $z=f(y)$

عندئذٍ: $\frac{dz}{dx}=\acute{f}(y)\frac{dy}{dx}$ نعوض في I فيكون:

نعوض في I فنحصل:

$$\frac{dz}{dx} + p(x).z = Q(x)$$

وهي معادلة تفاضلية خطية بالنسبة لمتحول z يمكن حلها بالطريقة المألوفة.

مثال: أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية:

$$e^y \frac{dy}{dx} + e^y = x$$

$$z = e^y \Rightarrow \frac{dz}{dx} = e^y \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dz}{dx} + z = x$$

$$I(x) = e^{\int p(x)dx} = e^x$$

$$I(x).z = \int I(x).\ Q(x)\, dx$$

$$e^x . z = \int e^x .\ x .\ dx$$

عن طريق التكامل بالتجزئة:

$$u = x \Rightarrow du = dx$$

$$dv = e^x \Rightarrow v = e^x$$

$$\int e^x . x\, dx = x e^x - \int e^x\, dx$$

$$e^x (x-1) + c \Rightarrow e^x . z = e^x (x-1) + c$$

$$z = (x-1) + \frac{c}{e^x}$$

$$e^y = x - 1 + \frac{c}{e^x} \Rightarrow y = \ln\left[x - 1 + \frac{c}{e^x}\right]$$

تمرين: أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية:

$$3x(1-x^2)\, y^2 \frac{dy}{dx} + (2x^2-1) y^3 = a x^2$$

أوجد a مقدار ثابت.

- انتهت المحاضرة - :)